Муниципальное общеобразовательное учреждение

«Восточно-Европейский лицей»

**Применение симметрии**

**при решении алгебраических задач**

Работу выполнили

ученицы 10И класса:

Короткова Анастасия

Журавлёва Дарья

Руководитель:

учитель высшей категории

Тимофеева М. Н.

Саратов 2008-2009

**Содержание:**

Введение…………………………………………………………… 3

Глава 1……………………………………………………………… 4

* + 1. Симметрия, виды симметрии……………………….. 4
    2. Преобразования……………………………………… 6
  1. Функция, способы задания функции. Свойства функции.. 9
  2. График функции…………………………………………… 13
  3. Некоторые элементарные функции и их свойства……….. 14

Глава 2. Практическое применение симметрии………………… 18

2.1. Симметричные графики……………………………………. 18

2.2. Решение уравнений высших порядков……………………. 37

Заключение. Вывод………………………………………………....45

Список используемой литературы………………………………. 46

**Введение.**

Тема данной работы: применение симметрии при решении алгебраических задач.

Данная тема актуальна. Слово «симметрия» происходит от греческого и означает «соразмерность». В таком общем виде симметрия играет огромную роль в искусстве, особенно ясную в орнаментах и архитектуре. Её можно заметить в музыке и поэзии. Симметрия широко встречается в природе, например у кристаллов, растений и животных, снежинок.

Симметрия может встретиться в некоторых разделах математики, например, при решении некоторых уравнений или при построении графиков функций. График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечётной функции симметричен относительно начала координат. График периодической функции имеет переносную симметрию вдоль оси абсцисс.

Предстоящие экзамены итоговой аттестации по математике в форме ЕГЭ требуют глубины знаний по данному предмету, поэтому мы поставили перед собой следующую цель: глубже изучить данные понятия и повысить качество знания предмета.

Для достижения этой цели в данной работе поставлены следующие задачи:

• изучить понятие «симметрия», виды симметрии, преобразования;

• изучить понятие «функция», способы задания функции, свойства функции;

• изучить методы решения уравнений высших степеней;

• показать практическое применение данных вопросов.

**Глава 1.**

**1.1.1. Симметрия, виды симметрии.**

**Симметрия** – движение, преобразование плоскости или пространства, при котором сохраняется расстояние между точками.

Фигура обладает симметрией, если существует движение (не тождественное), переводящее её в себя.

**Основные виды симметрии:**

• **центральная** – симметрия относительно точки (центра симметрии);

**центральная симметрия у геометрических фигур:**

у окружности и круга - 1 центр симметрии (центр этой окружности или круга),

у правильных многоугольников с чётным количеством сторон – 1 (центр этого многоугольника),

у прямоугольника, квадрата, параллелограмма, ромба – 1 (точка пересечения диагоналей),

у прямой – бесконечно много;

**центральная симметрия в пространстве:**

наблюдается у сферы, шара, параллелепипеда, правильных многогранников: тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра, додекаэдра;

• **осевая** – симметрия относительно прямой (оси симметрии);

**осевая симметрия у геометрических фигур:**

у неразвернутого угла – 1 ось симметрии (прямая, на которой расположена биссектриса этого угла),

у равнобедренного треугольника – 1 (прямая, содержащая высоту, проведённую к основанию этого треугольника),

у прямоугольника и параллелограмма – 2 (диагонали),

у равностороннего треугольника – 3 (прямые, содержащие высоты к сторонам этого треугольника),

у квадрата и ромба – 4 (диагонали, прямые, проходящие через середины двух противолежащих сторон),

у окружности – бесконечности много (диаметры);

**осевая симметрия в пространстве:**

наблюдается у сферы, шара, параллелепипеда, прямоугольного параллелепипеда (проходит через точку пересечения диагоналей оснований), правильных многогранников: тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра, додекаэдра;

• **зеркальная** – симметрия относительно плоскости;

**зеркальная симметрия наблюдается только в пространстве:**

наблюдается у сферы, шара, цилиндра, конуса, правильных многогранников: тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра, додекаэдра;

• **поворотная** (фигура обладает поворотной симметрией, если она переводится в себя некоторым поворотом, например: отрезок, круг, равносторонний треугольник, правильный n-угольник и др.);

• **переносная** (фигура обладает переносной симметрией, если она переходит в себя в результате какого-либо переноса (на ненулевой вектор), неограниченна, например: прямая имеет такую симметрию, так как допускает перенос вдоль себя; неограниченные фигуры, состоящие из правильно повторяющихся равных конечных фигур, такие, как квадратная сетка, сетка из прямоугольников, или треугольников и других фигур).

**1.1.2. Преобразования.**

Множество точек, сопоставленных точкам фигуры F, является некоторой фигурой F1, отличной от F. Говорят, что фигура F1 получена преобразованием, отображением или образом фигуры F для данного преобразования. Фигура F является прообразом фигуры F1.

Часто два или более преобразований выполняют последовательно, их называют **композицией нескольких преобразований**.

**Неподвижной точкой преобразования** f называется такая точка А, что f(А)=А.

Преобразование, все точки которого неподвижны, называется **тождественным преобразованием**.

Существуют преобразования, которые сохраняют расстояния между точками (движение) и преобразования, которые изменяют расстояния между точками в некоторое число раз (гомотетия – подобие ).

Преобразование фигуры, которое сохраняет расстояние между точками, называется **движением** этой фигуры.

**Виды движений:**

- **Параллельный перенос** – такое преобразование фигуры, при котором все точки фигуры перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние;

- **Отражение фигуры в прямой** а (осевая симметрия с осью а) – такое преобразование этой фигуры, при котором каждой точке данной фигуры сопоставляется точка, симметричная ей относительно прямой а;

- **Поворот** фигуры F вокруг центра О (центр поворота) на данный угол φ (0°≤φ≤180°, φ – угол поворота) в данном направлении;

- **Центральная симметрия** с центром в точке О – такое преобразование этой фигуры, при котором каждой точке данной фигуры сопоставляется точка, симметричная её относительно точки О. Является движением, изменяющим направления на противоположные;

- **Композиция двух движений**;

- **Скользящее отражение** – композиция осевой симметрии и переноса в направлении оси симметрии.

Существует также такое понятие, как **группа симметрии и преобразований фигур**. Ознакомимся с ним более подробно.

Элементами симметрии являются центры и оси, преобразованиями симметрии – движения самосовмещения.

• Если движение f – преобразование симметрии фигуры Q, то обратное ему движение f-1 также является **преобразованием симметрии** Q.

• Если движения f и g – преобразования симметрии фигуры Q, то их композиция g◦f также является **преобразованием симметрии** фигуры Q **или тождественным движением**.

В тех случаях, когда некоторая совокупность обратимых преобразований фигуры Q обладает указанными двумя свойствами, говорят, что эта совокупность является **группой преобразований фигуры Q**.

В частности, когда преобразованиями фигуры Q являются все её преобразования симметрии (вместе с тождественным преобразованием), говорят о **группе симметрии S(Q) фигуры Q**.

Чем богаче группа симметрии фигуры, тем симметричнее, правильнее эта фигура. Самая симметричная фигура – это вся плоскость. Любое движение плоскости совмещает её с собой. Поэтому группой симметрии плоскости является группа всех движений плоскости.

Из многоугольников самыми симметричными являются правильные многоугольники. Группа симметрии правильного n-угольника конечна. Она состоит из n поворотов вокруг центра О этого многоугольника на углы φ=k\*(360°/n) (где k=0,1, …, n) и n осевых симметрий относительно его осей симметрии.

Из ограниченных фигур самые симметричные фигуры – окружность, круг или фигуры, являющиеся объединением окружностей с общим центром О. Их группа симметрии состоит из всех поворотов вокруг точки О и всех осевых симметрий, оси которых проходят через О.

Необходимость рассматривать преобразования того или иного множества (а не только группы симметрии геометрических фигур) возникает очень часто. В математике они впервые появились в работах французского математика Эвариста Галуа (1811 – 1832) в его исследованиях о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Другой пример – кубик Рубика. Условия достижения результата в работе с кубиком Рубика тоже сводятся к изучению группы его преобразований.

У одной и той же группы Q могут быть различные группы её преобразований. Пусть G и H – две группы преобразований фигуры Q. Если каждое преобразование из группы H является преобразованием из группы G (т.е. H – часть G), то говорят, что H является **подгруппой** группы G, и пишут HЄG.

**Примеры групп преобразований самой широкой фигуры – всей плоскости:**

1. Группа всех движений плоскости. Она является подгруппой группы всех преобразований плоскости.
2. Группа всех движений плоскости первого рода. Это подгруппа группы всех движений плоскости.

Замечание: движения плоскости второго рода не образуют группы, поскольку композиция двух движений второго рода является движением первого рода.

1. Группа всех параллельных переносов плоскости. Это подгруппа группы движений первого рода.
2. Группа всех поворотов вокруг фиксированной точки О. Она является подгруппой группы движений первого рода.

**1.2. Функция, способы задания функции. Свойства функции.**

Говорят, что между двумя величинами существует функциональная зависимость, если они, характеризуя какой-либо процесс, изменяются, и между изменением одной и другой из величин имеется определённая зависимость.

**Функция=правило=зависимость=соответствие**

**Функцией** называют такую зависимость переменной у от переменной х, при которой каждому значению переменной х из множества Х соответствует единственное значение переменной у из множества Y.

Переменная **х** – независимая переменная (аргумент);

переменная **у** – зависимая переменная (функция от переменной х).

Обозначается функция латинскими буквами f,g,h и др. Записывается y=f(x).

**Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции:**

• наиболее употребительным является способ задания функции с помощью формулы у=f(x), где f(x)–некоторое выражение с переменной х, в таком случае говорят, что функция задана формулой или что функция задана **аналитически**; причём существуют разные **виды аналитического задания функции:**

▪ **явное задание**: у=5х2 – 4 (разрешено относительно переменной у);

▪ **неявное задание**: 8х2 + 3у=7;

▪ **кусочное задание**: f(х)=

• на практике часто используется **табличный** способ задания функции (приводится таблица, указывающая значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента);

• **параметрическим**: переменные х и у выражаются через третью величину, называемую параметром:

Например: х2+у2=1, у≥0 – уравнение полуокружности, находящейся в верхней полуплоскости

в параметрическом виде:

• **графическим** (с помощью графика).

**Свойства функции:**

1. **Область определения** **или** область **существования функции D(у)** – множество значений переменной х, при которых функция определена (существует). D(у)=Х;
2. **Область значений функции Е(у)** – множество значений переменной у, соответствующих заданным значениям переменной х. Е(у)=Y;
3. **Чётность функции**.

Функция у=f(х) может быть чётной или нечётной, если её область определения симметрична относительно 0;

Функция у=f(х) называется **чётной**, если для любых х из D(у) выполняется соотношение f(х)=f(-х), график чётной функции симметричен относительно оси ординат (Оу), пример: у=cos х, степенные функции с чётным показателем;

Функция у=f(х) называется **нечётной**, если для любых х из D(у) выполняется соотношение -f(х)=f(-х), график нечётной функции симметричен относительно начала координат (0;0), такой график называют кососимметричным, пример: у=sin х, у=tg х;

Если не выполняется ни одно из соотношений, то функцию называют **ни чётной, ни нечётной**;

1. **Нули функции** – значения переменной х, при которых функция обращается в нуль (у=0);
2. **Точки пересечения графика с осями координат** (х=0,у=0), решается уравнение у=0, находятся нули функции; находятся значения у при х=0 (координаты точек на оси ординат);
3. **Периодичность функции**.

Функция называется **периодической**, если существуют такие числа ω, 2ω, 3ω, …, что выполняется соотношение f(х+kω)=f(х), где kЄZ;

Наименьшее значение ω называется **основным периодом** функции, пример: все тригонометрические функции, у={х} – дробная часть числа х;

1. **Интервалы знакопостоянства** – интервалы, в которых функция принимает либо отрицательные, либо положительные значения (у>0, у<0; граничные точки не включены);
2. **Непрерывность функции** на промежутке Х, т.е. график функции на промежутке Х – сплошной (не имеет проколов и скачков);
3. **Ограниченность функции** (f(х)≤М, f(х)≥m, где М – верхняя граница, наибольшее значение функции, m – нижняя граница, наименьшее значение функции); пример: у=sin x, m=-1, M=1;
4. **Асимптоты** – прямые, к которым неограниченно приближается график функции, имеющий бесконечную ветвь, при удалении этой ветви в бесконечность;

**Виды асимптот**:

▪ **вертикальные** (обычно проходят через открытый интервал области определения функции);

▪ **горизонтальные** (обычно проходят через открытый интервал области значений функции);

▪ **наклонные**;

Асимптоты на графике изображаются пунктирной линией;

1. **Монотонность функции**.

Функция у=f(х) **монотонно возрастает** на промежутке I, если для любых х1 и х2 из I таких, что х1<х2, выполняется неравенство f(х1)<f(х2);

Функция у=f(х) **монотонно убывает** на промежутке I, если для любых х1 и х2 из I таких, что х1<х2, выполняется неравенство f(х1)>f(х2);

1. **Точки экстремума** (х=х1, х=х2, …)**:** **точки максимума** **и** **точки минимума.**

Значение х=х0 (х=х0 ℮D(f)) является **точкой минимума**, если для любого значения х из окрестностей (х0-δ; х0+δ) выполняется неравенство f(x0)<f(x);

Значение х=х0 (х=х0 ℮D(f)) является **точкой максимума**, если для любого значения х из окрестностей (х0-δ; х0+δ) выполняется неравенство f(x0)>f(x);

1. **Выпуклость** или **вогнутость функции** (вниз или вверх);
2. **Контрольные точки** (для контроля правильности построения графика, для уточнения кривых графика на отдельных участках).

**1.3. График функции.**

**Графиком** функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Всякая функциональная зависимость между двумя величинами может быть изображена **плоскостным графиком**. Во избежание недочетов построению графика должно предшествовать исследование общих свойств заданной функции, нахождение вычислением основных, **характерных** точек графика и исследование **поведения** кривых графика на разных участках между этими точками. Для контроля правильности построения графика вычисляют дополнительно координаты одной или нескольких **контрольных точек** и наносят их на график. Контрольные точки служат также для **уточнения** кривых графика на отдельных участках.

* 1. **Некоторые элементарные функции и их свойства.**

1. **Постоянная функция** – функция, заданная формулой у=b,где b**-**некоторое число. Графиком постоянной функции у=b является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку (0;b) на оси ординат.
2. **Прямая пропорциональность** – функция, заданная формулой у=kx,где к≠0. Число k называется коэффициентом пропорциональности.

**Cвойства функции:**

• область определения функции – множество всех действительных чисел;

• y=kx – нечётная функция;

• при k>0 функция возрастает, а при k<0 убывает на всей числовой прямой.

1. **Линейная функция –** функция, которая задана формулой y=kx+b, где k и b-действительные числа. Если в частности, k=0, то получаем постоянную функцию y=b; если b=0, то получаем прямую пропорциональность y=kx. Графиком функции является прямая.

**Свойства функции:**

• область определения функции – множество всех действительных чисел;

• функция y=kx+b общего вида, т.е. ни чётна, ни нечётна;

• при k>0функция возрастает, а при k<0 убывает на всей числовой прямой.

1. **Обратная пропорциональность –** функция, заданная формулой y=k/х, где k≠0 Число k называют коэффициентом обратной пропорциональности. Графиком функции является гипербола.

**Свойства функции:**

• область определения – множество всех действительных чисел кроме нуля;

• y=k/x **–** нечётная функция;

• если k>0, то функция убывает на промежутке (0;+∞) и на промежутке (-∞;0); если k<0, то функция возрастает на промежутке (-∞;0) и на промежутке (0;+∞).

1. **Функция y=x2** . Графиком функции является парабола.

**Свойства функции:**

• область определения – вся числовая прямая;

• y=x2**–** чётная функция;

• на промежутке [0;+∞) функция возрастает;

на промежутке (-∞;0] функция убывает.

1. **Функция y=x3**. Графиком функции является кубическая парабола.

**Свойства функции:**

• область определения – вся числовая прямая;

• y=x3**–** нечётная функция;

• функция возрастает на всей числовой прямой.

1. **Степенная функция с натуральным показателем –** функция, заданная формулой y=xn, где n – натуральное число. При n=1 получаем функцию y=x, ее свойства рассмотрены в п.2. При n=2;3 получаем функции y=x2; y=x3. Их свойства рассмотрены выше.

Пусть n – произвольное чётное число, большее двух: 4,6,8... В этом случае функция y=xnобладает теми же свойствами, что и функция y=x2. График функции напоминает параболу y=x2, только ветви графика при |х|>1 тем круче идут вверх, чем больше n, а при |х|<1 тем «теснее прижимаются» к оси Х, чем больше n.

Пусть n – произвольное нечётное число, большее трех: 5,7,9... В этом случае функция **y=xn** обладает теми же свойствами, что и функция y=x3. График функции напоминает кубическую параболу.

1. **Степенная функция с целым отрицательным показателем –** функция, заданная формулой y=x-n, где n – натуральное число. При n=1 получаем y=1/х, свойства этой функции рассмотрены в п.4.

Пусть n – нечётное число, большее единицы: 3,5,7... В этом случае функция y=x-nобладает в основном теми же свойствами, что и функция y=1/х.

Пусть n – чётное число, например n=2.

**Свойства функции y=x-2:**

• функция определена при всех x≠0;

• y=x-2 **–** чётная функция;

• функция убывает на (0;+∞) и возрастает на (-∞;0).

Теми же свойствами обладают любые функции при чётном n, большем двух.

1. **Функция y=√х**

**Свойства функции:**

• область определения – луч [0;+∞);

• функция y=√х– общего вида;

• функция возрастает на луче [0;+∞).

1. **Функция y=3√х**

**Свойства функции:**

• область определения – вся числовая прямая;

• функция y=3√хнечётна;

• функция возрастает на всей числовой прямой.

1. **Функция y=n**√**х**

При чётном n функция обладает теми же свойствами, что и функция y=√х;

при нечётном n функция обладает теми же свойствами, что и функция y=3√х.

1. **Степенная функция с положительным дробным показателем –** функция, заданная формулой y=xr, где r – положительная несократимая дробь. Любой график функции вида y=xr, где r>1, заключен между графиками функций y=x2 и y=x3, заданных на промежутке [0;+∞).

**Свойства функции:**

• область определения – луч [0;+∞);

• функция общего вида;

• функция возрастает на [0;+∞).

1. **Степенная функция с отрицательным дробным показателем –**функция, заданная формулой y=x-r, где r – положительная несократимая дробь.

**Свойства функции:**

• область определения – промежуток (0;+∞);

• функция общего вида;

• функция убывает на (0;+∞).

1. **Обратная функция**

Если функция y=f(x) такова, что для любого ее значения yo уравнение f(x)=yo имеет относительно х единственный корень, то говорят, что функция f обратима.

Если функция y=f(x) определена и возрастает (убывает) на промежутке Х и областью ее значений является промежуток Y, то у нее существует обратная функция, причем обратная функция определена и возрастает (убывает) на Y.

Таким образом, чтобы построить график функции, обратной к функции y=f(x), надо график функции y=f(x) подвергнуть преобразованию симметрии относительно прямой y=x.

1. **Сложная функция –** функция z=h(x), аргументом которой является другая любая функция. Значение функции вычисляется по правилу: h(x)=g(f(x)).

Запись композиции функций выглядит следующим образом: h=g ◦f=g(f(x));

композиция функций не обладает переместительным законом (g ◦f≠ f ◦g).

Возьмем, к примеру, функцию y=x+4. Подставим в аргумент функцию y=x+2. Получается: y(x+2)=x+2+4=x+6. Это и будет являться сложной функцией.

**Глава 2. Практическое применение симметрии.**

**2.1. Симметричные графики.**

Дана функция у=х2+5

Исследуем функцию на чётность:

D(y)=R, следовательно, D(у) симметрична относительно нуля;

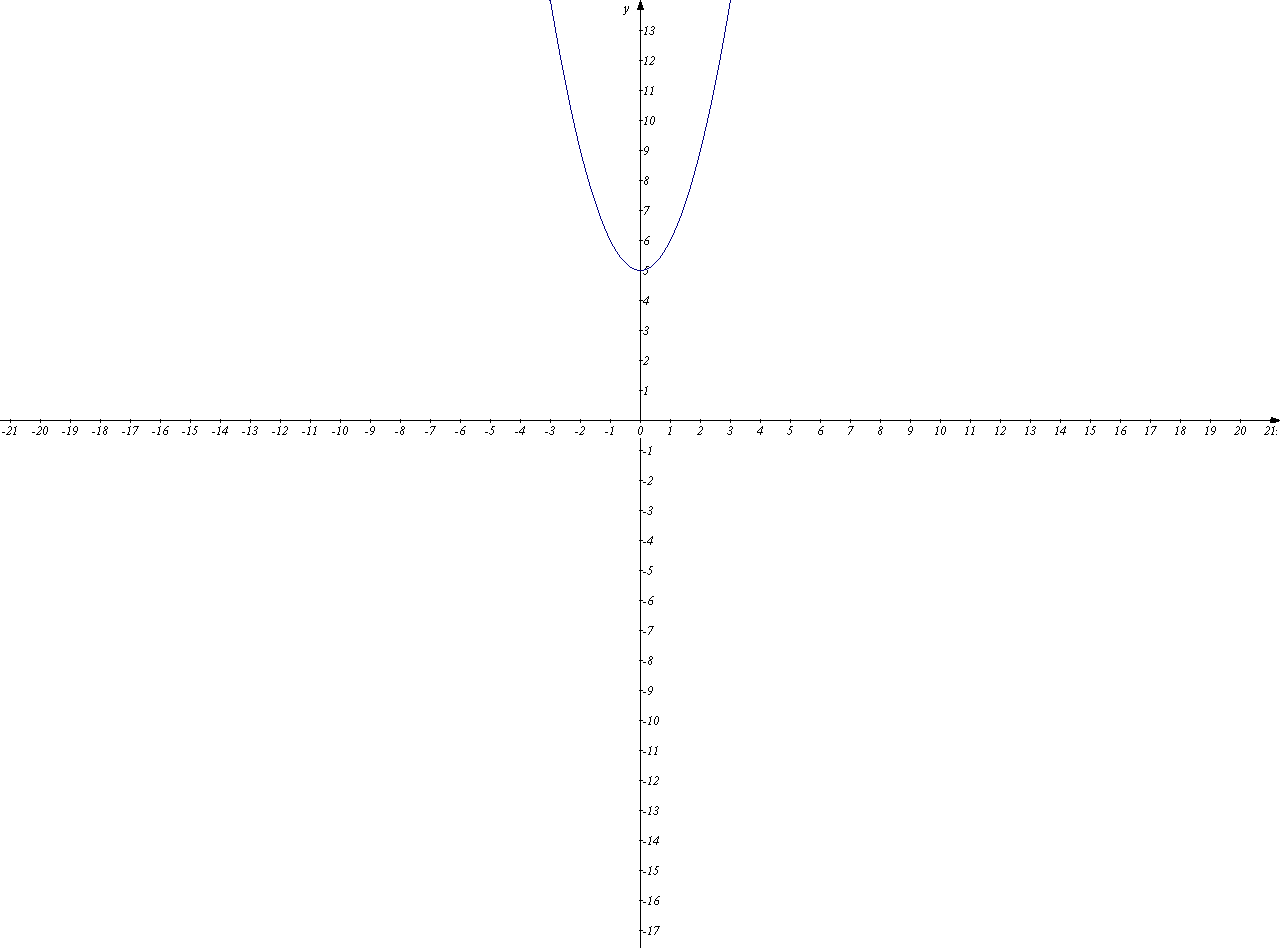
у(-х)=(-х)2+5=у(х), следовательно, функция чётная, график функции симметричен относительно оси ординат;

у=х2+5 – квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, т.к. а=1, а>0, D(y)=R;

найдём координаты вершины параболы:

m=-b/2a, m=0; n=5; (0;5) – координаты вершины параболы;

В итоге получим график функции у=х2+5:



Дана функция у=х3

Исследуем функцию на чётность:

D(у)=R, следовательно, D(у) симметрична относительно нуля;

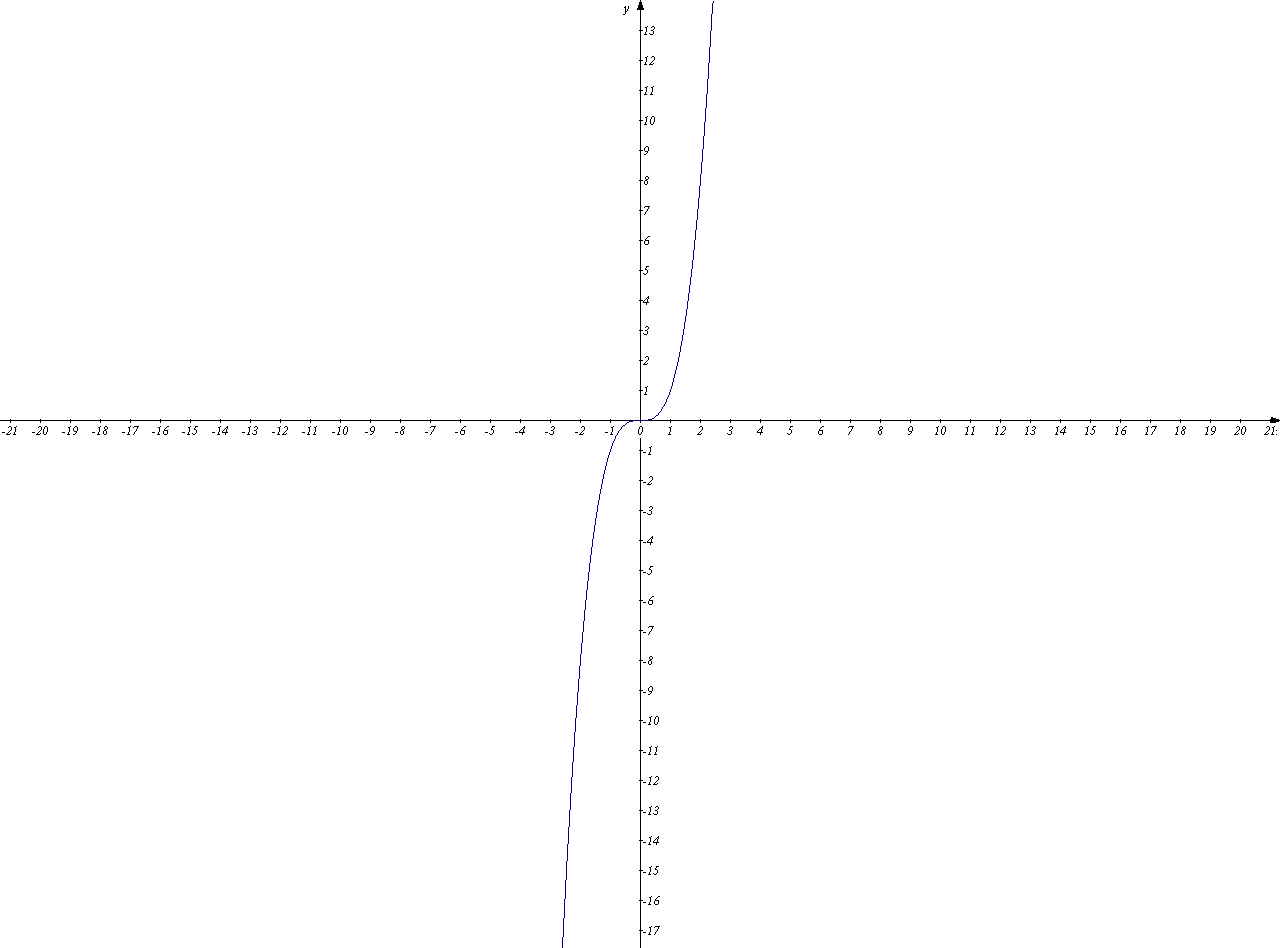
у(-х)=(-х)3= -у(х), следовательно, функция нечётная, график функции симметричен относительно начала координат;

графиком является кубическая парабола, ветви которой расположены в I и III координатных четвертях, т.к. а=1, а>0, D(y)=R;

найдём координаты вершины параболы:

(0;0) – координаты вершины параболы;

В итоге получим график функции у=х3:



Дана функция у=

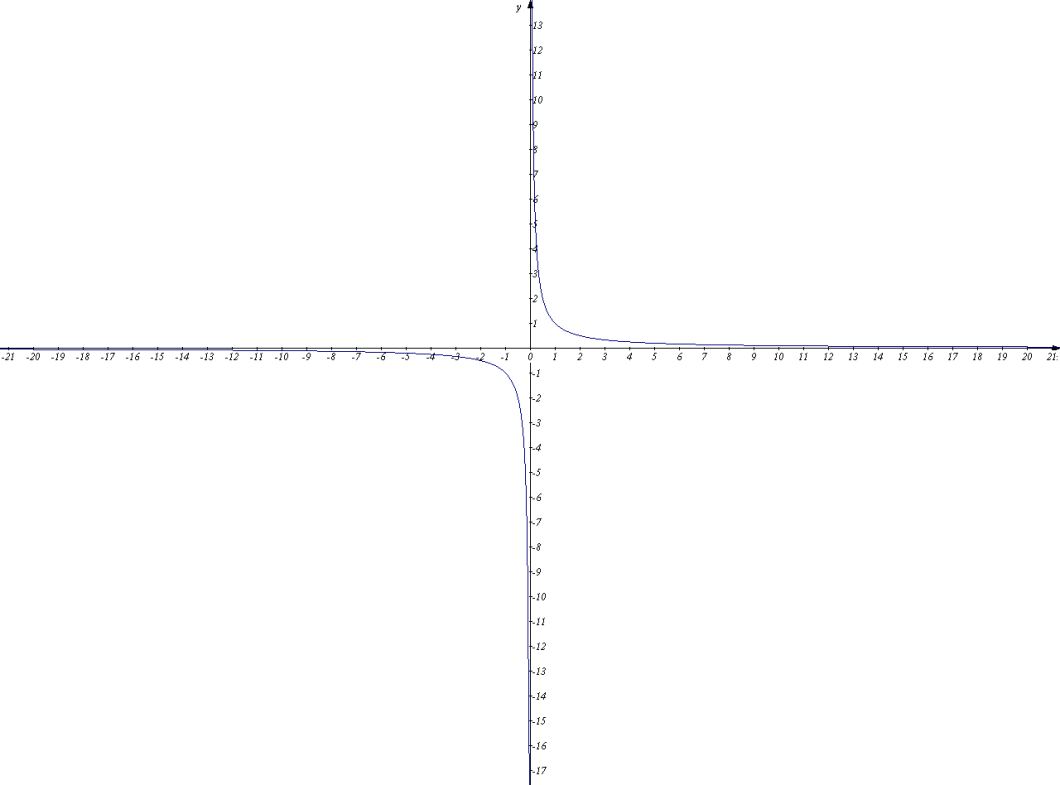
Исследуем функцию на чётность:

D(у)=R\{0}, следовательно, D(у) симметрична относительно нуля;

у(-х)= = -у(х), следовательно, функция нечётная, график функции симметричен относительно начала координат;

у= – функция обратной пропорциональности, графиком является гипербола, ветви которой расположены в I и III координатных четвертях, т.к. а=1, а>0, D(y)=R\{0};

В итоге получим график функции у= :



Дана функция у=

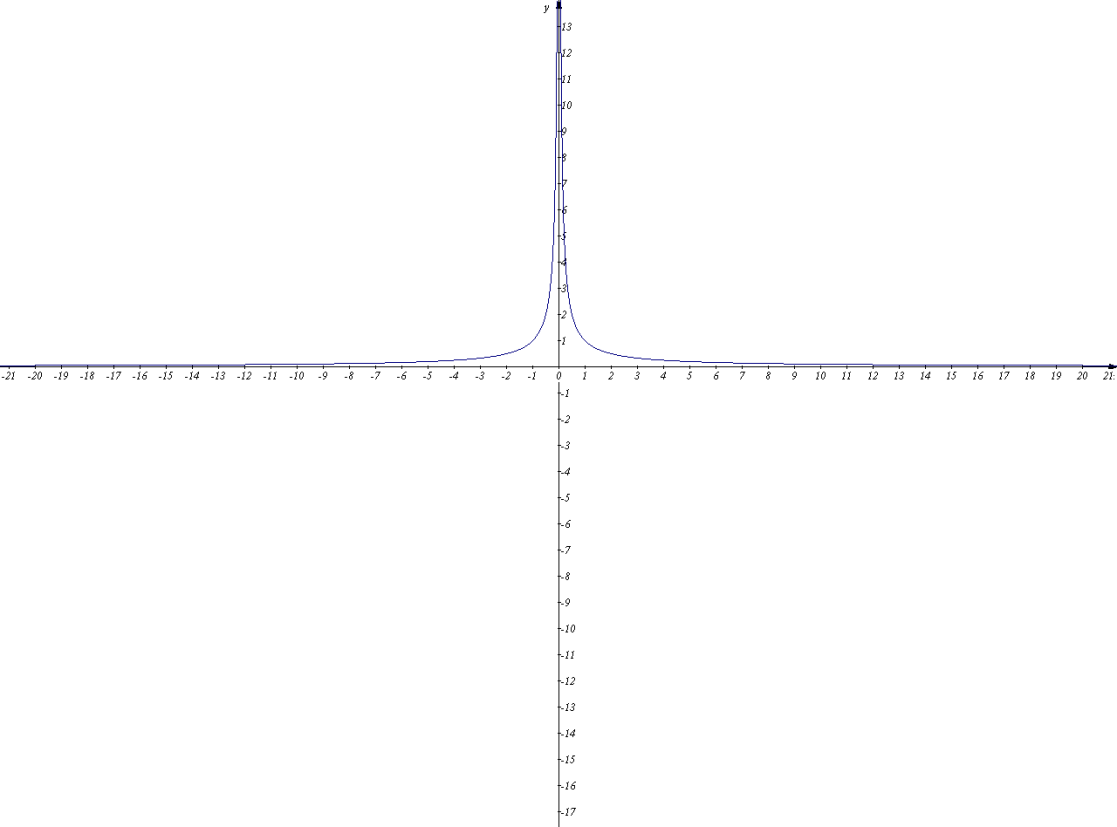
Исследуем функцию на чётность:

D(у)=R\{0}, следовательно, D(у) симметрична относительно нуля;

у(-х)= = у(х), следовательно, функция чётная, график функции симметричен относительно оси ординат;

у= – функция обратной пропорциональности, графиком является гипербола, D(y)=R\{0};

В итоге получим график функции у= :



Функция вида у= |х-а|+|х+а| имеет график, симметричный относительно оси Оу.

Дана функция у=|1-х|+|1+х|

Исследуем функцию на чётность:

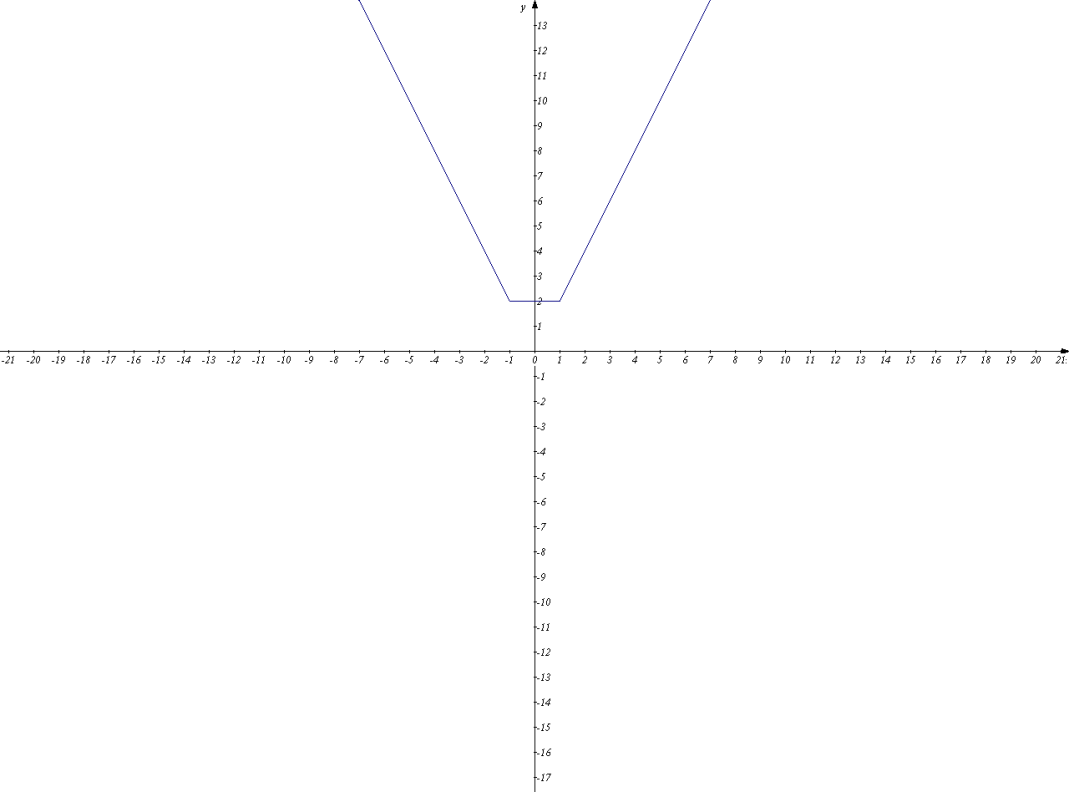
D(у)=R, следовательно, D(у) симметрична относительно нуля;

у(-х)=|1-(-х)|+|1+(-х)|= |1+х|+|1-х|=у(х), следовательно, функция чётная, график функции симметричен относительно оси ординат;

найдём точки перелома графика:

⬄

В итоге получим график функции у=|1-х|+|1+х|:



Функция вида у= |х-а|-|х+а| имеет график, симметричный относительно начала координат.

Дана функция у=|1-х|-|1+х|

Исследуем функцию на чётность:

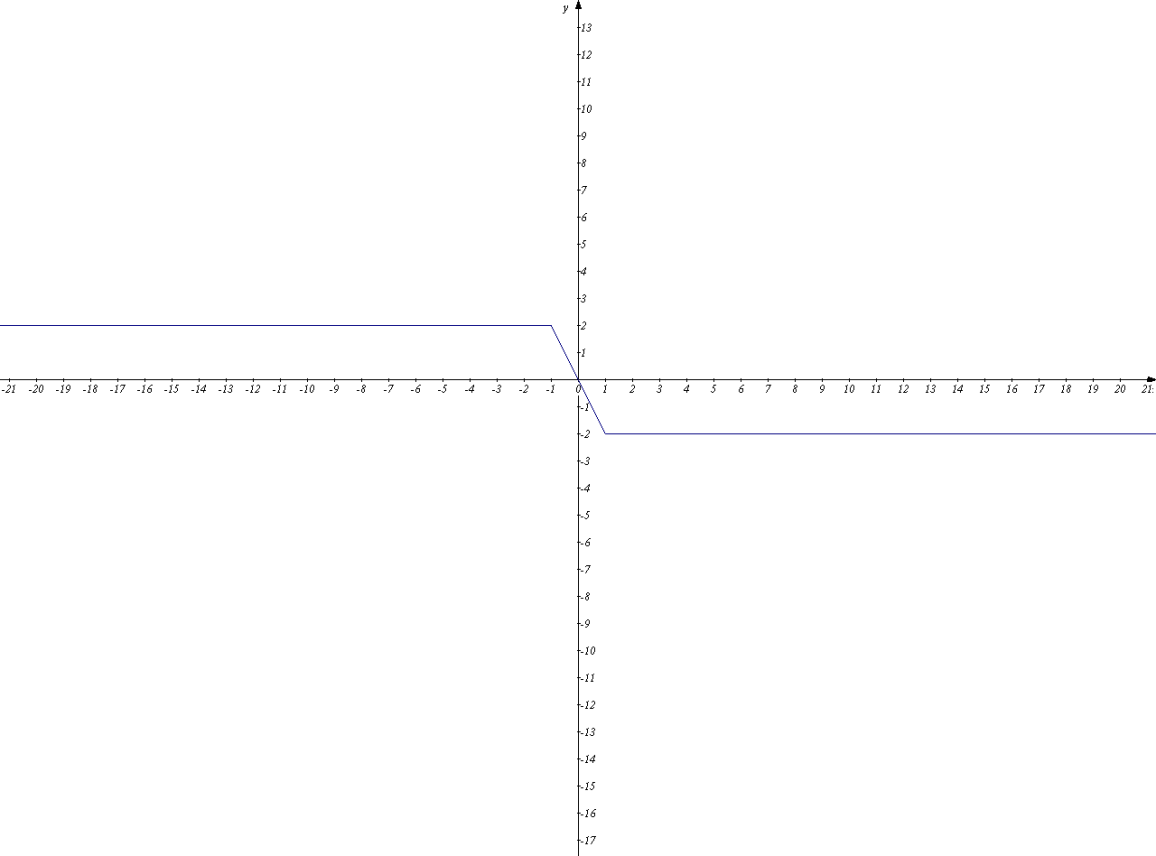
D(у)=R, следовательно, D(у) симметрична относительно нуля;

у(-х)=|1-(-х)|-|1+(-х)|= |1+х|-|1-х|= -у(х), следовательно, функция нечётная, график функции симметричен относительно начала координат;

найдём точки перелома графика:

⬄

В итоге получим график функции у=|1-х|-|1+х|:



Дана функция у= |х2-5|

Исследуем функцию на чётность:

D(y)=R, следовательно, D(у) симметрична относительно нуля;

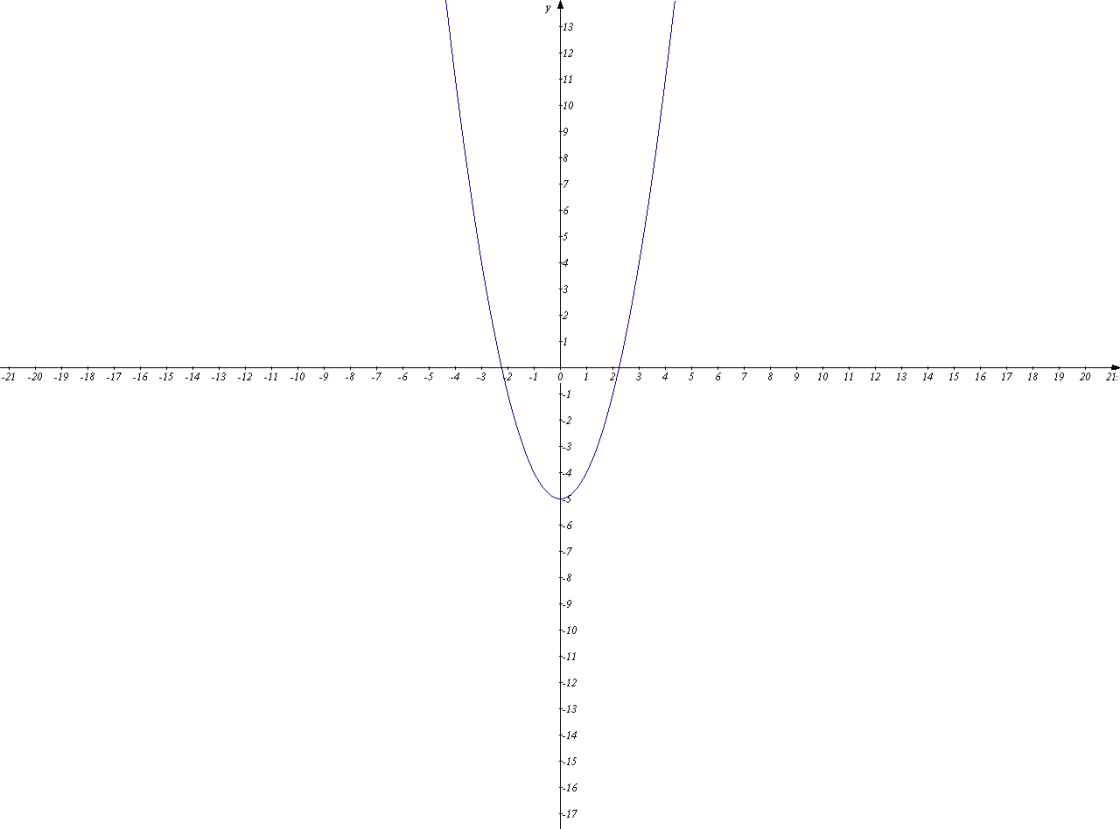
у(-х)= |(-х)2-5|= у(х), следовательно, функция чётная, график функции симметричен относительно оси ординат;

у=х2-5 – квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, т.к. а=1, а>0, D(y)=R;

найдём координаты вершины параболы:

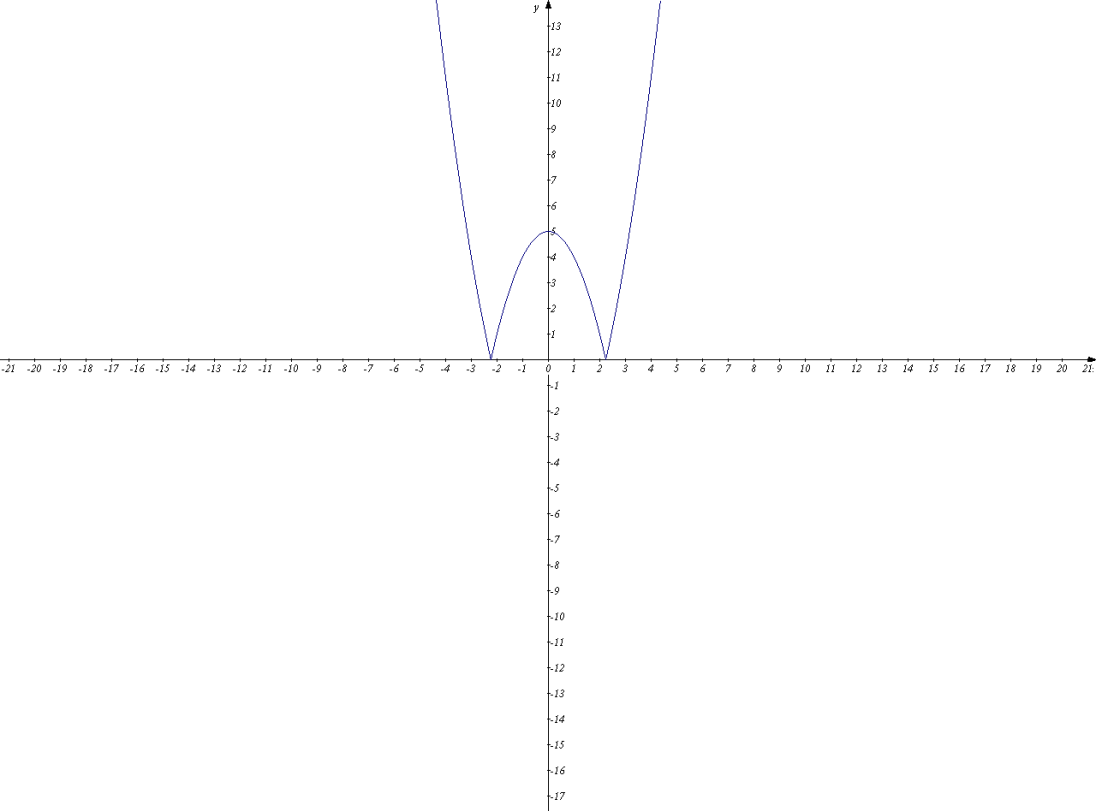
m=-b/2a, m=0; n= -5; (0;-5) – координаты вершины параболы;

Построим график в системе координат:



отобразим часть графика функции, находящуюся в нижней полуплоскости, симметрично относительно оси абсцисс.

В итоге получим график функции у= |х2-5|:



Функция у=f(|х|) является чётной. График этой функции симметричен относительно оси Оу.

Дана функция f=(5-|х|)(|х|-1)

Исследуем функцию на чётность:

D(f)=R, следовательно, D(f) симметрична относительно нуля;

f(-х)=(5-|-х|)(|-х|+1)=(5-|х|)(|х|+1)=f(х), следовательно, функция чётная, график функции симметричен относительно оси ординат;

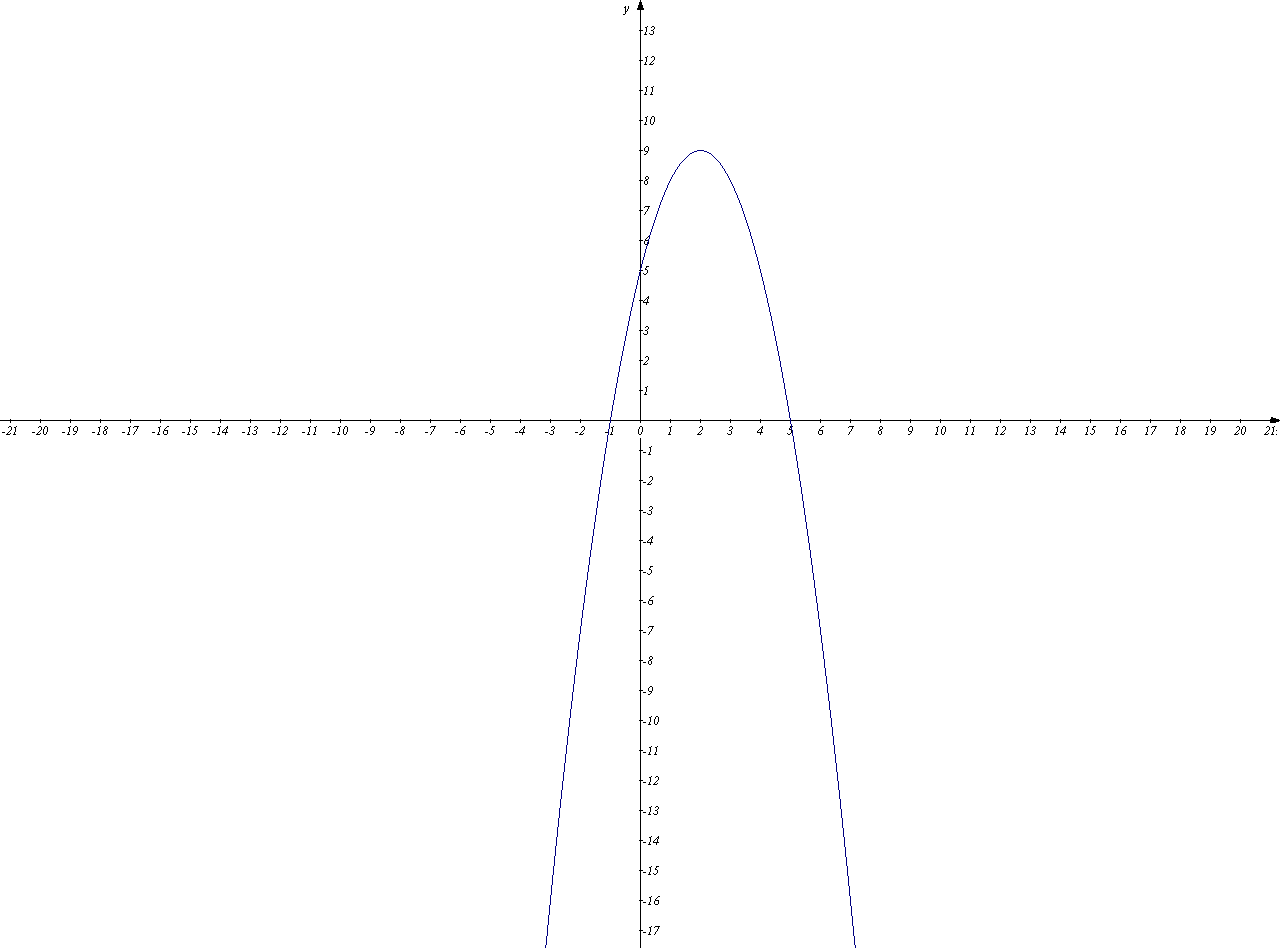
построим график функции при х≥0:

y=(5-х)(х+1), у=-х2+4х+5 – квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, т.к. а=-1, а<0, D(y)=R;

найдём координаты вершины параболы:

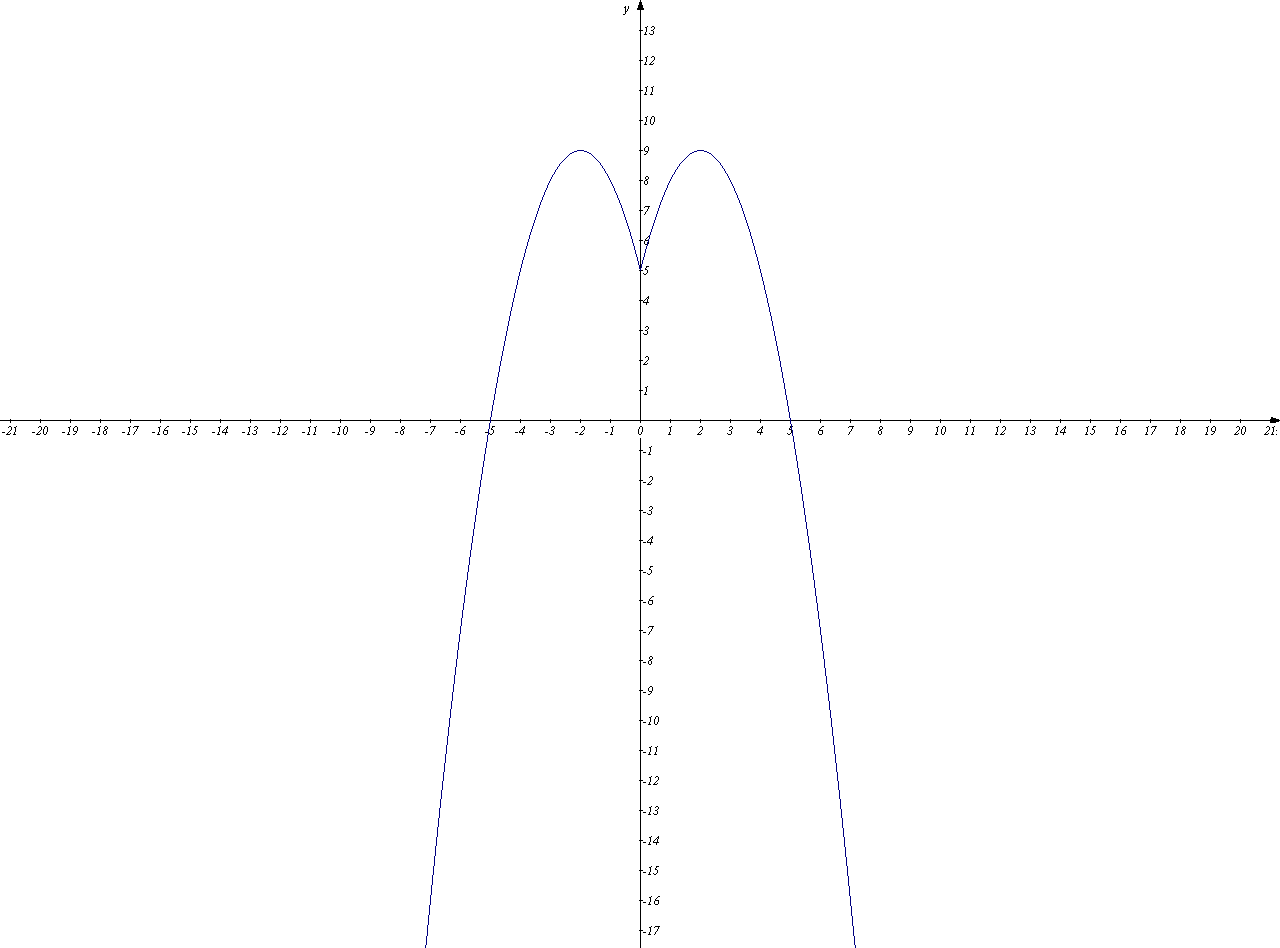
m=-b/2a, m=2; n=9; (2;9) – координаты вершины параболы;

Построим график в системе координат:



построим график функции при х<0 симметричным отображением части графика функции, находящейся в правой полуплоскости, относительно оси ординат.

В итоге получим график функции f=(5-|х|)(|х|-1):

****

Дана функция f

Исследуем функцию на чётность:

х²-1≥0, D(f)=(-∞;-1][1;+∞), следовательно, D(f) симметрична относительно нуля;

f(-х)= =f(х), следовательно, функция чётная, график функции симметричен относительно оси ординат;

Дальнейшее исследование будем вести для х℮[1;+∞):

**область изменения функции:**

если х=1, то у=0; если х→∞, то у→∞, следовательно, у℮[0;+∞);

**точки пересечения графика с координатными осями:**

если у=0, то х= ±1. Пересечений с осью Оу нет, т.к. х=0 не входит в область определения функции;

**выделение промежутков монотонности:**

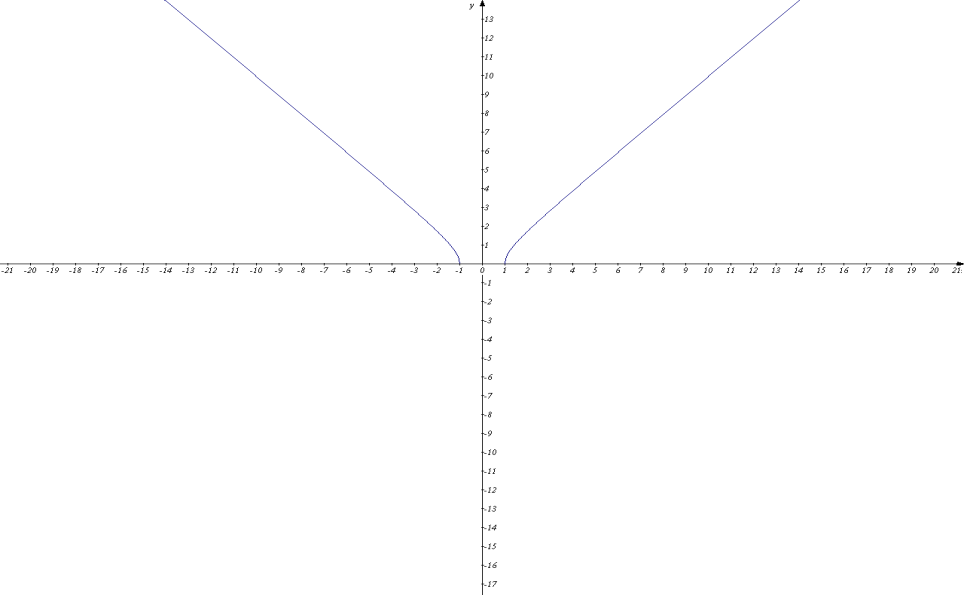
для х1> х2 ≥1 рассмотрим разность:

f(x1)-f(x2) = = = >0, следовательно, у(х1)>у(х2), значит, функция возрастает на промежутке (1;+∞);

**нахождение корней функции и интервалов знакопостоянства:**

если х℮[1;+∞), то =0, при х=1; >0, при всех х℮[1;+∞).

По результатам исследований построим график функции f в системе координат:



Дана функция f=, выделим целую часть: f=1+.

Исследуем функцию на чётность:

D(f)=R\{-1;1}, следовательно, D(f) симметрична относительно нуля;

f(-х)=1+ =f(х), следовательно, функция чётная, график функции симметричен относительно оси ординат;

построим график функции у= и сместим его на 1 единицу вверх вдоль оси Оу параллельным переносом;

D(у)=R\{-1;1};

==0;

= -∞;

== ∞;

= ∞;

= -∞;

**интервалы знакопостоянства:**

график функции у=– парабола, ветви которой направлены вниз, нулей у функции нет (т. к. уравнение =0 не имеет решений), следовательно, у(х)>0 на промежутке (-∞;-1)(1;+∞),

у(х)<0 на промежутке (-1;1);

**точки экстремума:**

g(x)=x2-1; gmin(0)= -1;

== -3, уmax(0)= -3;

исследуем функцию на **монотонность:**

промежуток (1;+∞)

х1,х2℮(1;+∞), х1<х2

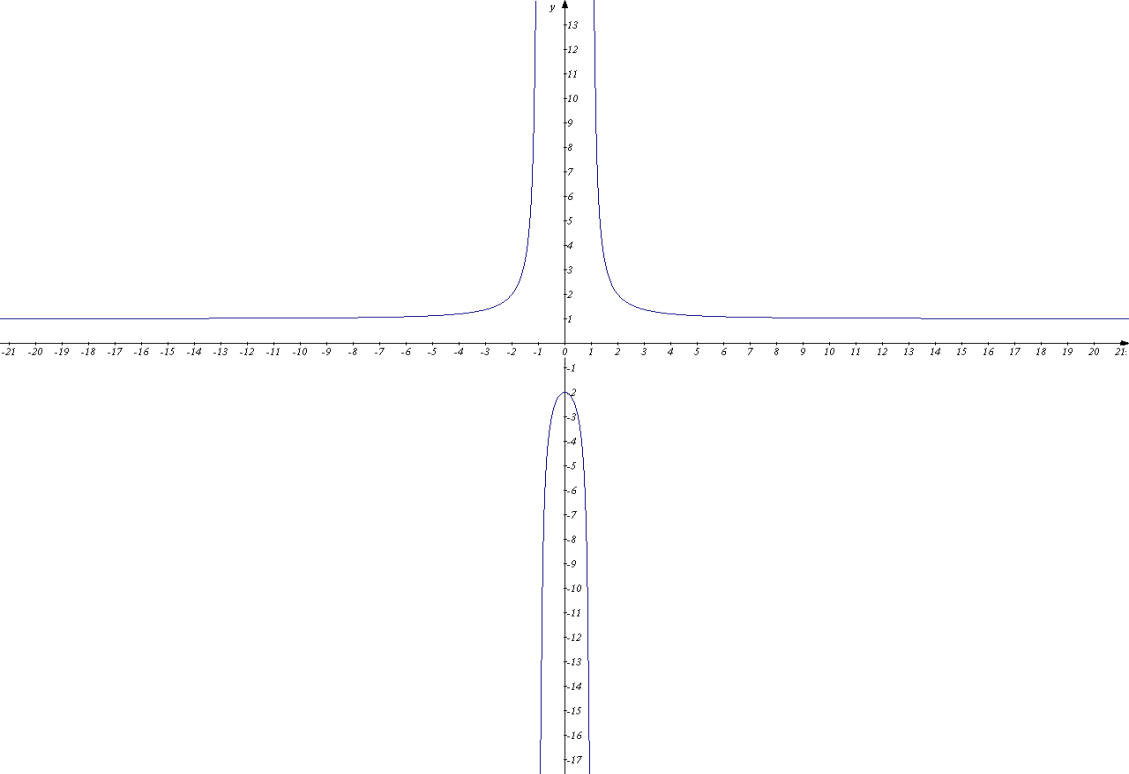
у(х1) = , у(х2) =

у(х1) - у(х2) = - = >0, следовательно, у(х1)>у(х2), значит, функция убывает на промежутке (1;+∞);

функция убывает на промежутке (0;1);

функция возрастает на промежутке (-∞;-1)(-1;0);

В итоге получим график функции f= :



Дана функция у= sgn x

sgn x=

D(у)=R;

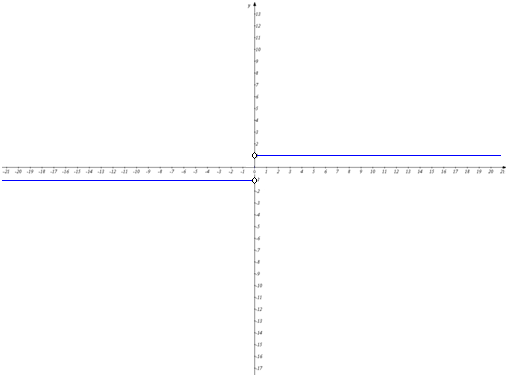
Е(у)={-1,0,1};

Исследуем функцию на чётность:

D(у)=R, следовательно, D(у) симметрична относительно нуля;

sgn(-x)= = -sgn x, следовательно, функция нечётная, график функции симметричен относительно начала координат;

В итоге получим график функции у= sgn x:



Дана система уравнений

Решим систему уравнений графически:

1. |х|+|у|=a

при фиксированном а>0 графиком уравнения является квадрат с вершинами (а;0); (0;а); (-а;0); (0;-а). Таким образом, членами семейства |х|+|у|=а являются гомотетичные квадраты (центр гомотетии – точка О (0;0));

1. х²+у²=1

графиком уравнения является единичная окружность с центром (0;0) и радиусом R=1;

графики данных уравнений симметричны относительно оси Ох и оси Оу, поэтому далее будем рассматривать графики только в I четверти координатной плоскости:

если a≤0, то система решений не имеет;

если 0<a<1 (квадрат находится внутри окружности х²+у²=1), то система решений не имеет;

если а=1 (квадрат вписан в окружность), то система имеет 1 решение; всего – 4 решения;

если 1<a<√2 (сторона квадрата имеет две общие точки с окружностью), то система имеет 2 решения; всего – 8 решений;

если а=√2 (квадрат вписан в окружность), то система имеет 1 решение; всего – 4 решения;

если а>√2, то система решений не имеет.

Итак, если а<1 или а>√2, то нет решений; если а=1 или а=√2, то решений четыре; если 1<a<√2, то решений восемь.

Дана система уравнений

Решим систему уравнений графически:

1. |х|+|у|=1

графиком уравнения является квадрат с вершинами в точках (1;0); (0;1); (-1;0); (0;-1);

1. х²+у²=а² (а>0)

графиком уравнения является окружность с центром (0;0) и радиусом R=a, а℮(0;+∞); R=1\*sin 45°= ;

графики данных уравнений симметричны относительно оси Ох и оси Оу, поэтому далее будем рассматривать графики только в I четверти координатной плоскости:

если 0<a< , то система решений не имеет;

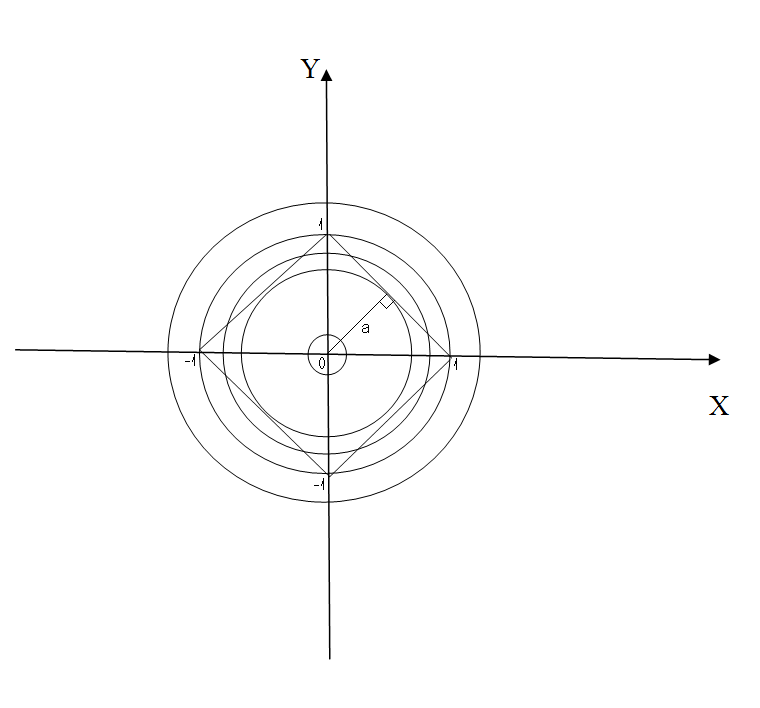
если а= , то система имеет 1 решение; всего – 4 решения;

если <a<1, то система имеет 2 решения; всего – 8 решений;

если а=1, то система имеет 1 решение; всего – 4 решения;

если а>1, то система решений не имеет.

Итак, если 0<a< или а>1, то нет решений; если а= или а=1, то решений четыре; если <a<1, то решений восемь.



Дана система уравнений известно, что система имеет два решения.

Найдем значение параметра а графическим способом решения:

⬄

1. y= -x+√14 – линейная функция, графиком является прямая, D(y)=R;
2. y= -x-√14 – линейная функция, графиком является прямая, D(y)=R;
3. х²+у²=2(1+a)

если 2(1+а)<0, то решений нет;

если 2(1+а)=0, то графиком уравнения является точка (0;0);

если 2(1+а)>0, то графиком уравнения является окружность с центром (0;0) и радиусом R=;

графики данных уравнений симметричны относительно начала координат, поэтому далее будем рассматривать графики только в I четверти координатной плоскости:

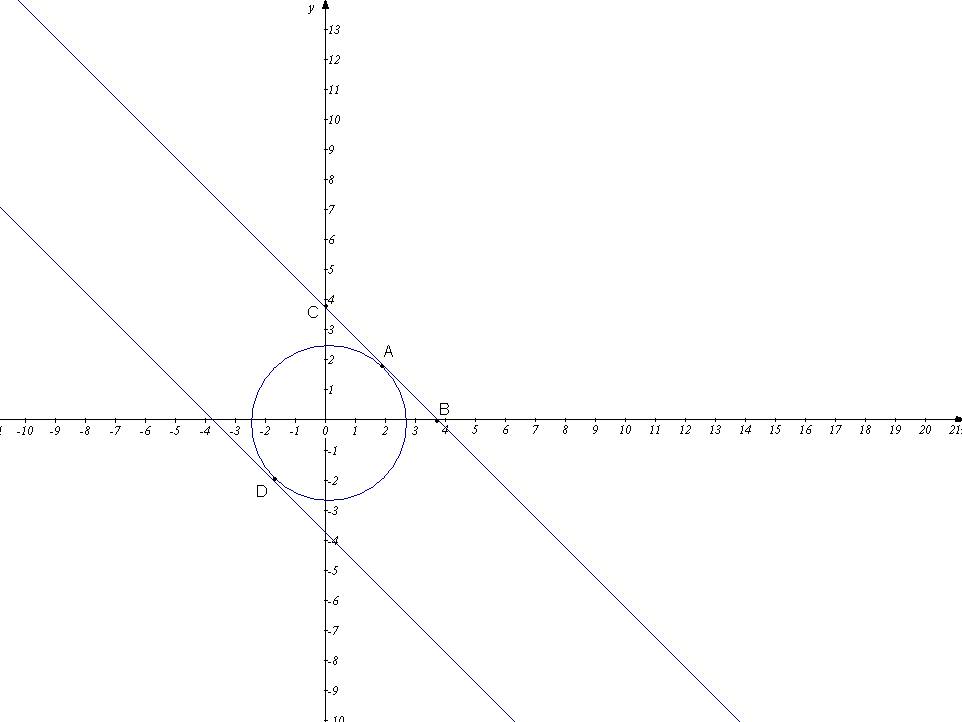
=> ∟ОВС= 45°;

∆ОАВ: ОА=ОВ\*sin 45°,

ОА=√14\* = = √7;

по условию система имеет два решения, значит, окружность с радиусом R=√7 касается двух параллельных прямых y= -x+√14 и y= -x-√14 (в точках A и D);

= √7 ⬄( )² = (√7)² ⬄ 2(1+a)=7 ⬄ 1+a= ⬄ a= .

****

**2.2. Решение уравнений высших порядков.**

Рассмотрим применение симметрии при решении некоторых уравнений высших степеней. Уравнение вида …, где …- некоторые числа, , x- переменная, называется уравнением n- степени от одной переменной x.

Рассмотрим методы решения симметрических уравнений высших степеней.

Уравнение вида

(2)

(3)

где a≠0, называются симметрическими уравнениями четвёртой степени.

Разделив обе части уравнения (2) на (x=0 не является его корнем), получим эквивалентное ему уравнение

. (2а)

Аналогично для уравнения (3) получаем эквивалентное ему уравнение

. (3а)

Для решения уравнений (2а) и (3а) положим соответственно и . Поскольку

и ,

То получаем

, (2б) , (3б)

Таким образом, если , - корни уравнения (2б), а , - корни уравнения (3б), то исходные уравнения (2) и (3) эквивалентны соответственно совокупностям уравнений

Если уравнение (2б) и (3б) решений не имеет, то соответствующее исходное уравнение так же решений не имеет.

**Пример 1**:

Решить уравнение

.

Решение.

Поскольку x=0 не является корнем уравнения, то, разделив обе его части на ,получим

, получим

, пусть , , тогда уравнение примет вид

,получаем

Возвращаясь к уравнению замены, имеем совокупность

Тогда,

Ответ:

**Пример 2**:

Решить уравнение .

Решение.

Так как x=0 не является корнем уравнения, то, разделив обе его части на ,получим

, получим , пусть , , тогда уравнение примет вид , получаем

Возвращаясь к уравнению замены получим совокупность

Тогда

Ответ:

Уравнение вида

,

Где a< b< c< d, b-a=d-с, можно решать, используя замену переменных (симметризацию уравнения). Метод симметризации уравнения- метод,при котором вводится новая переменная, равная среднему арифметическому выражения.

Решить уравнение

(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

.

Так как , то введем новую переменную

*.*

Подставляя в исходное уравнение, получим

,

Или .

Отсюда находим ,

т.е. . Соответствующие корни исходного уравнения равны и .

Уравнение вида ,

Где ab= cd, сводится к решению совокупности двух квадратных уравнений при помощи замены .

Решить уравнение.

.

Решение. Заметим, что (-2)(-12)=(-3)(-8). Перемножив в левой части этого уравнения первую и четвертую скобку, а так же второю и третью, получим

.

Поскольку x=0 не является корнем данного уравнения, делим обе части этого уравнения на . Получим уравнение

*,*

равносильное исходному. Сделаем замену переменной . Тогда , или , откуда ,.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

Или

, решая эту совокупность, получаем ответ:

.

Ответ: .

Уравнение вида

Можно решить также, используя метод симметризации, т.е. делая замену .

Дано уравнение:

.

Решение. Данное уравнение после замены переменной приводится к виду или

.

Решая это биквадратное уравнение, получим его корни:. Таким образом, корнями данного уравнения являются числа .

**Пример 1**: Решить

Произведем замену переменной, тогда ,

тогда x=y+3, получаем , раскроем скобки, используя пирамиду Паскаля. Получаем , тогда, пусть , получим .

t=1 является корнем уравнения, тогда

). Приравняем ) к нулю и решим данное квадратное уравнение. Получим совокупность

Возвращаясь к уравнению замены получим , тогда , тогда получаем, что .

Ответ:

**Решение некоторых задач с параметром**

Рассмотрим применение симметрии при решении некоторых задач с параметром.

**Пример 1.**

Может ли уравнение иметь три корня.

**Решение.**

Зададим функцию для данного уравнения: .

Исследуем функцию на четность:

Найдем область определения функции. Область определения функции равна множеству действительных чисел, следовательно, область определения функции симметрична относительно начала координат.

,

*.*

Функция четная, значит количество нулей слева от начала координат равно количеству нулей функции справа.

не является нулём функции, значит функция имеет четное число нулей, и, следовательно уравнение имеет четное число корней.

Ответ: данное уравнение не может иметь три корня.

**Пример 2.**

Может ли уравнение иметь пять корней.

**Решение.**

Зададим функцию для данного уравнения:

.

Исследуем функцию на четность:

Найдем область определения функции. Область определения функции равна множеству действительных чисел, следовательно, область определения функции симметрична относительно начала координат.

,

*.*

Функция четная, значит количество нулей слева от начала координат равно количеству нулей функции справа.

не является нулём функции, значит функция имеет четное число нулей, и, следовательно уравнение имеет четное число корней.

Ответ: данное уравнение не может иметь пять корней.

**Пример 1**: дана функция

,

и нечетная функция , найти значение выражения .

**Найти**: , , , .

**Решение.**

,, , .

Известно, что - нечетная функция, тогда , поэтому , =, тогда получим

=.

Ответ: 9,2.

**Пример 2**: дана функция ,

-четная функция, - нечетная.

, .

**Найти**: .

**Решение.**

По условию -четная функция, - нечетная, тогда

,

**.**

Найдем .

, подставляя известные значения и , получим

.

Ответ: 1.

**Заключение**

В данной работе мы рассмотрели понятия «симметрия» и «функция». Также мы изучили виды симметрии, преобразования, способы задания и свойства функции. Свойства чётности и монотонности функции мы использовали при построении графиков функций и решении уравнений с параметром.

Нами было выявлено следующее: график чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечётной функции симметричен относительно начала координат, график периодической функции имеет переносную симметрию вдоль оси абсцисс.

Также, мы выяснили, что метод симметризации позволяет существенно облегчить решение уравнений высших порядков.

Нами было показано практическое применение данных вопросов.

**Список литературы**

* Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия для 8-9 классов. – М.: «Просвещение», 1991.
* Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.В., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. – М.: 1987.
* • Вигнер Е. Этюды о симметрии. – М.: «Мир», 1971.
* Вейль Г. Симметрия. – М.: «Наука», 1968.
* Вернадский В.И.
* Компьютерная программа для построения графиков «UNGRAPH».
* Сборник заданий по математике-11. – М.: « Дрофа», 2002.
* Математический энциклопедический словарь.
* Тюхтин В.С., Урманцев Ю.А. Система, симметрия, гармония. – М.:, 1988.
* Сканави М.А. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. – М.:
* Ожегов. Толковый словарь.
* «Оникс 21 век», «Мир и образование», «Альянс- В», 2003.
* Шубников А.В., Копцик В.А. Симметрия в науке, искусстве. – М.: «Наука», 1972.